www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

groupe iecs

CONCOURS 1989

MATHEMATIQUES

Régime technologique

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 3

Les parties IV A. et IV B. peuvent être traitées séparément. Elles utilisent les résultats des parties I, II et III qui sont indépendantes.

– Partie I –

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

où x, y, z, t sont des nombres réels.

1) Résoudre le système

$$(S_\lambda) \qquad AX = \lambda X$$

d'inconnue X, où λ est un paramètre réel.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$) les valeurs de λ pour lesquelles le système (S_λ) admet une infinité de solutions.

2) On considère la matrice carrée P d'ordre 4 telle que :

a) la dernière ligne de P est $(1\ 1\ 1\ 1)$;

b) pour $i = 1, 2, 3, 4$ la i-ème colonne de P est une solution du système (S_{λ_i}).

Calculer P^2, et en déduire l'inverse P^{-1} de la matrice P.

3) Calculer la matrice $P^{-1}AP$, et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on écrira clairement les seize coefficients de A^n).

– Partie II –

Soit f la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{4^{10}.5^x - 5^{10}.4^x}{4^{10}(5^x - 4^x)}$

et (C) la courbe représentative de f.

1) Quel est le domaine de définition Df de f ?

2) Calculer les limites de f aux bornes de Df et en déduire la nature des branches infinies de (C).

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).
On précisera la valeur du réel a tel que $f(a) = 0$, et une valeur approchée à 10^{-1} près du réel b tel que $f(b) = \frac{1}{2}$.

– Partie III –

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant pour $k \geq 1$ la relation :

$$(R) \qquad 9u_k = 5u_{k-1} + 4u_{k+1}.$$

Pour $k \geq 1$, on pose : $\quad v_k = u_k - u_{k-1} \quad$ et $\quad S_k = \sum_{i=1}^{k} v_i$.

1) Exprimer S_k en fonction de u_0 et u_k.

2) Montrer que (v_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison q. En déduire l'expression de S_k en fonction de v_1 et k.

3) Déduire des questions 1) et 2) l'expression de u_k en fonction de u_0, u_1 et k.

4) On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, vérifiant la relation (R), telle que :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_N = 0 \quad \text{pour un entier } N \geq 1.$$

a) Utiliser la relation obtenue dans la question 3) pour calculer u_1 puis u_{10} en fonction de N.

b) Vérifier que : $\qquad u_{10} = f(N)$

où f est la fonction étudiée dans la partie II.

TSVP

– Partie IV –

On s'intéresse à des jeux opposant deux joueurs J et J'. Ils disposent de N jetons ($N \geq 1$), et d'un dé équilibré possédant deux faces blanches, deux faces vertes et deux faces rouges.

A.) On prend $N = 3$ et on suppose qu'un jeton est blanc, un vert et un rouge. Le jeu est le suivant : on répartit d'abord au hasard les trois jetons entre les joueurs J et J' ; puis à chaque coup, on lance le dé et on observe la couleur de la face supérieure : le joueur possédant le jeton de cette couleur le cède alors à son adversaire.

Pour $n \geq 0$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons que possède le joueur J à l'issue du n-ième coup, X_0 représentant le nombre de jetons que possède J après la répartition initiale.

1) Calculer, pour $i = 1, 2, 3, 4$ les probabilités conditionnelles p_i, q_i, r_i, s_i suivantes :

$$p_i = p(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = 0)$$
$$q_i = p(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = 1)$$
$$r_i = p(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = 2)$$
$$s_i = p(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = 3).$$

2) On désigne par M la matrice carrée d'ordre 4 dont la i-ème ligne est : $(p_i q_i r_i s_i)$, et par C_n la matrice-colonne dont la i-ème ligne est la probabilité $p(X_n = i - 1)$, pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Montrer que : $C_{n+1} = MC_n$.

3) On suppose dans cette question que X_0 est distribué suivant une loi binomiale $B(3, \frac{1}{2})$.

Déterminer la loi de probabilité de X_1.

Que peut-on en conclure concernant la loi de X_n pour $n \geq 1$?

4) On suppose dans cette question que X_0 est distribué suivant une loi uniforme : $p(X_0 = i - 1) = \frac{1}{4}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Utiliser la question I. 3) pour déterminer la loi de probabilité de X_n (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

Préciser les lois de X_1, X_2, X_3.

b) Quel est le nombre moyen $E(X_n)$ de jetons que le joueur J peut espérer avoir après le n-ième coup ?

B.) On suppose que $N \geq 10$. La couleur des jetons n'intervient plus. Le jeu est maintenant le suivant : pour commencer, le joueur J possède k jetons ($0 \leq k \leq N$) et le joueur J' les $(N - k)$ autres jetons. A chaque coup, on lance le dé.

i) Si la face supérieure est verte, le joueur J reçoit un jeton de J' ;

ii) Si la face supérieure est rouge, le joueur J donne un jeton à J' ;

iii) Si la face supérieure est blanche, on relance le dé : si la face verte apparaît à ce deuxième lancer, J reçoit un jeton de J' ; sinon, J donne un jeton à J'.

Le jeu s'arrête dès que J n'a pas de jetons (on dira que J perd) ou bien que J' n'a pas de jetons (on dira que J gagne).

Pour $n \geq 0$, X_n désigne encore le nombre de jetons que possède le joueur J à l'issue du n-ième coup, X_0 étant égal à k.

1) Quelle est la probabilité p de l'événement $(X_1 = k + 1)$ lorsque $k < N$?

2) On appelle p_k la probabilité de l'événement E : "le joueur J perd".

a) Préciser la valeur de p_0 et p_N.

b) Remarquer que pour $k < N$

$$p(E|X_1 = k + 1) = p_{k+1} \quad \text{et} \quad p(E|X_1 = k - 1) = p_{k-1} \ ;$$

et en déduire que : $p_k = (1 - p).p_{k-1} + p.p_{k+1}$.

3) On suppose dorénavant que $k = 10$.

a) Utiliser la question III 4) pour exprimer p_{10} en fonction de N.

b) Pour quelles valeurs de N, le joueur J a-t-il une probabilité de perdre inférieure à $0,5$?

c) Quel est le nombre maximal de jetons que peut posséder initialement le joueur J' pour que la probabilité que J perde soit inférieure à $0,5$?

* * * * *

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail